# <u>楕円曲線の比較定理と Theta 関数</u>

講師：望月 新一 （京大数理研）

楕円曲線は１００年以上も前から幾何学や整数論の中心的な研究対象とされてきた。近代的な視点に立つと、数体のような大域的な体の整数論への重要なアプローチとして、まずは対応する**局所的**な整数論を理解し、それから数体の個々の素点における局所的な情報を張り合わせることによって元の数体に関する情報を引き出そうとする、というものがある。楕円曲線の場合、その局所体上の整数論は今ではかなりよく理解されていて、その局所的な理論を代表するものがいわゆる「比較定理」である。「比較定理」とは、楕円曲線の de Rham コホモロジーと、エタール又は特異コホモロジーのような「位相的」なコホモロジーの間の何らかの同型や同値性のことである。本講義では、これらの局所的な理論を復習した後、 Arakelov 理論のような数体上**大域的**な枠組の中で、諸々の局所的な理論の大域的な類似を実現することとはどういうことかを考える。このような類似を実現するためには、何らかの「大域的な関数」、即ち ample な line bundle の section を考えなければならないが、楕円曲線の場合、そのような section の空間を統制する重要な道具として、「theta 群」というものがある。ところが、この「theta 群」自身もコホモロジーと同様、モチーフ的な対象であり、エタール型の実現もあれば、無限素点における実現もある。このようにして、「theta 群」が司る関数たち、つまり「theta 関数」も、比較定理と自然に関係してくるし、 Arakelov 理論の枠組の中での「大域的な比較定理」を実現するカギにもなっている。なお、この比較定理の Arakelov 版を使って楕円曲線の幾何的な族に付随する小平 -Spencer 写像の大域的な数論版を自然に構成することができるので、この数論的な小平 -Spencer 写像にも触れたいと思う。

具体的には、講義は次のような内容を予定している（多少の変更の可能性有り。）：

（月） <u>複素数体上の楕円曲線</u>： $\mathbf{C}$ 上の楕円曲線の古典的な Hodge 理論。楕円曲線の普遍拡大と、それによる Hodge 理論の新しい解釈。 $\mathbf{C}$ 上の楕円曲線の line bundle に入る admissible 計量。 $\mathbf{C}$ 上の $\Theta$ 関数と $\Theta$ 群。

（火） <u>Mumford の代数的 $\Theta$ 関数と Zhang の計量付き line bundle の理論</u>: $\Theta$ 群の一般論。 $\Theta$ 群による line bundle の自明化。 Chern 類や複素数体上の理論との関係、類似性。退化する楕円曲線。 Zhang の計量付き line bundle とその曲率。曲率や Green 関数とその応用。 Mumford の理論の、退化する楕円曲線に対する拡張。

（水） <u>$p$ 進体上の楕円曲線</u>： Faltings の almost étale 拡大。 ordinary 楕円曲線と Serre-Tate 理論。 $B_{\mathrm{DR}}$ とは何か。無限遠点での状況。評価写像による楕円曲線の $p$ 進周期写像の構成。

（木） <u>Hodge-Arakelov 比較定理、その I</u>: Hodge-Arakelov 比較定理の簡略化された statement。定理の技術的なルーツについて。定理の概念的なルーツについて。「有限解像度」の Hodge 理論。小平 -Spencer 写像とは何か。 Arakelov 理論とは何か。 Diophantus 問題との関係。

（金） <u>Hodge-Arakelov 比較定理、その II</u>: Hodge-Arakelov 比較定理の（およそ）正確な statement。 Schottky-Weierstrass $\zeta$ 関数の設定。合同型 Schottky-Weierstrass $\zeta$ 関数。次数の計算。混標数での整構造。組合せ論的なモデル。無限素点での理論： Kähler 幾何、 Hermite 多項式、 Legendre 多項式、二項係数多項式。